Maximisation du Profit à Court Terme

Exercice Corrigé

Rappel Mathématique : Conditions de Maximum

Pour maximiser une fonction $f(x)$, on utilise deux conditions :

1 Condition du premier ordre :

$$f'(x) = 0$$

- Cela signifie que la pente de la tangente est horizontale en x^*.
- x^* peut être un maximum, un minimum ou un point d'inflexion.

2 Condition du second ordre :

$$f''(x) < 0$$

- Si $f''(x) < 0$, la fonction est concave $\rightarrow$ c'est un maximum. - Si $f''(x) > 0$, la fonction est convexe $\rightarrow$ c'est un minimum.
Ces conditions permettent d'optimiser une fonction en économie (profit, coût, etc.).

Énoncé de l'exercice

Une entreprise produit un bien Q en utilisant du travail L. **Données :**

- Fonction de production :

$$Q = 10L - 0.5L^2$$

- Coût total :

$$CT = 50 + 5L$$

- Prix de vente par unité : $P = 15$.

Objectifs :

1. Trouver la fonction de profit $\pi(L)$.
2. Déterminer la quantité optimale L^*.
3. Vérifier que L^* est bien un maximum.
4. Calculer la production optimale Q^* et le profit maximal π^*.

1 Fonction de profit $\pi(L)$

2 Maximisation du profit : $\pi'(L) = 0$

3 Vérification du second ordre : $\pi''(L) < 0$

4 Calcul de Q^* et π^*

Vérification empirique du maximum

On teste $\pi(L)$ autour de $L^* = 9.67$:

L	$\pi(L)$

Les fondements de l’offre de bien et de services

3. Les coûts de long terme

Les Courbes Isoquantes en Production à Long Terme

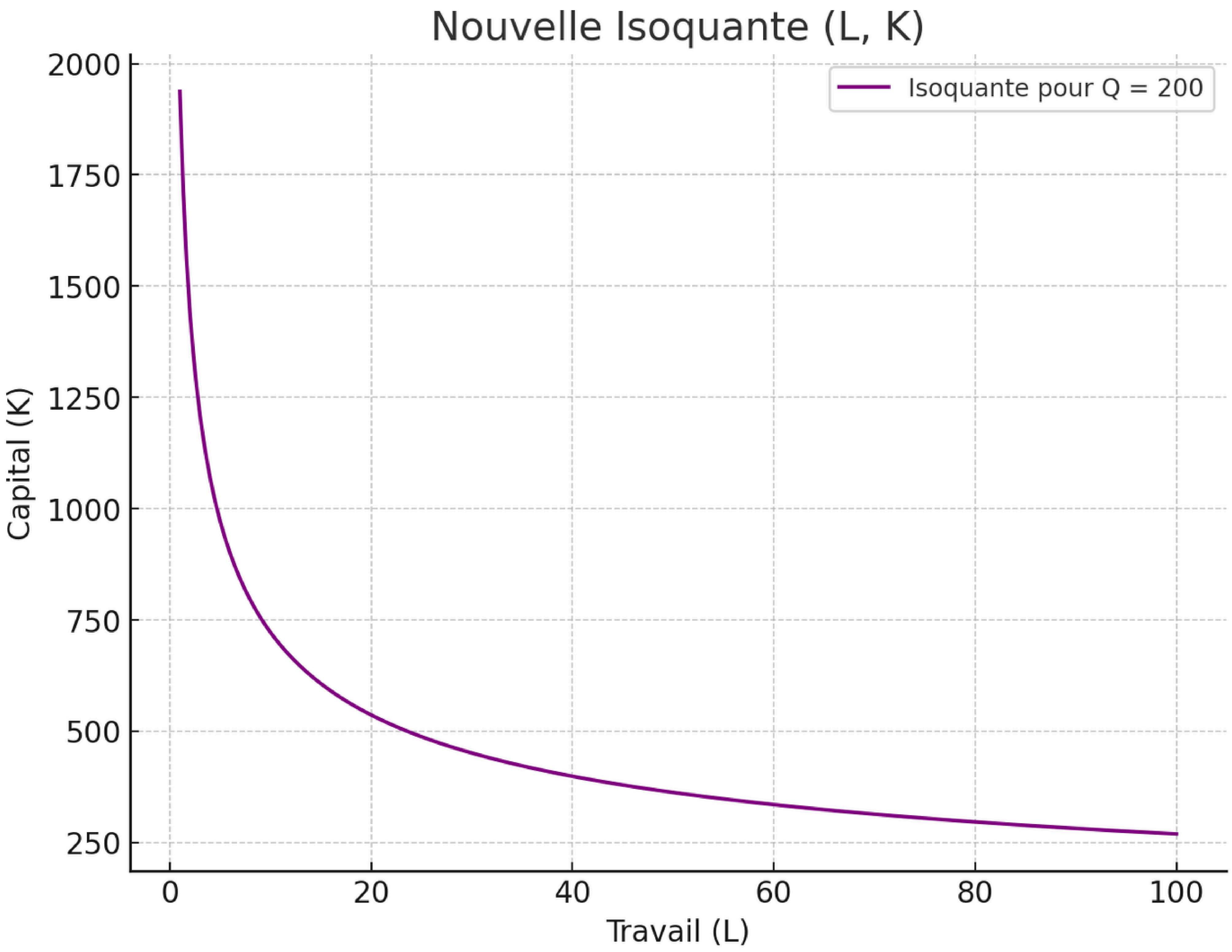
Introduction aux Courbes Isoquantes

Définition:

- Une isoquante est une courbe qui représente toutes les combinaisons de deux inputs, comme le travail (L) et le capital (K), qui produisent le même niveau de sortie (Q) dans un processus de production.

Caractéristiques:

- Montre la substitution possible entre les inputs tout en maintenant la production constante.
- La pente de l'isoquante indique le taux marginal de substitution technique (TMST) entre les inputs.


Nouvelle Isoquante (L, K)
Isoquante pour Q = 200
Capital (K)
Travail (L)
2000
1750
1500
1250
1000
750
500
250
0
20
40
60
80
100

Importance des Isoquantes

Pourquoi les isoquantes sont-elles importantes ?

- Aident à comprendre comment les entreprises peuvent ajuster leur utilisation des inputs pour rester efficaces.
- Fournissent des informations sur la flexibilité de la production et la possibilité de substitution entre les inputs.
- Sont essentielles pour la planification et l'optimisation de la production à long terme.

Exemple d'Isoquante de Production

Exemple Simplifié:
Imaginons une entreprise qui peut produire 100 unités d'un bien en utilisant différentes combinaisons de travail (L) et de capital (K).

- Une combinaison pourrait être 50 unités de travail et 50 unités de capital.
- Une autre combinaison pourrait être 70 unités de travail et 30 unités de capital.

Ces combinaisons seraient représentées par des points sur la même isoquante, illustrant comment l'entreprise peut substituer le travail au capital tout en produisant 100 unités du bien.

Visualisation des Isoquantes

Tracé d'Isoquantes:

Pour visualiser les isoquantes, les économistes utilisent des graphiques avec le travail (L) sur un axe et le capital (K) sur l'autre. Chaque isoquante représente un niveau différent de production (Q).

- Les isoquantes plus éloignées de l'origine représentent des niveaux de production plus élevés.
- La tangence entre une isoquante et une ligne d'isocoût indique la combinaison optimale d'inputs pour un niveau de production donné au coût minimal.

Application : Courbe d'isoquante

Contexte: Supposons une fonction de production avec $Q = L^{0.5} \times K^{0.5}$ pour $Q = 100$ unités.

Étapes pour Tracer l'Isoquante

Définir la Quantité de Production Q:

- Supposons que $Q = 100$ unités.

Utiliser la Fonction de Production $Q = L^{0.5} \times K^{0.5}$:

- Pour maintenir Q constant à 100 unités, résolvez pour K en fonction de L.
  $K = \left(\frac{Q}{L^{0.5}}\right)^2$

Tracer l'Isoquante

Processus:

1. Utilisez une gamme de valeurs pour L (par exemple, de 1 à 100).
2. Calculez les valeurs correspondantes de K pour chaque valeur de L en utilisant la relation $K = \left(\frac{Q}{L^{0.5}}\right)^2$.
3. Tracez L sur l'axe des x et K sur l'axe des y pour visualiser l'isoquante.

L	K
10	1000
40	250
70	142

Graphique de l'Isoquante

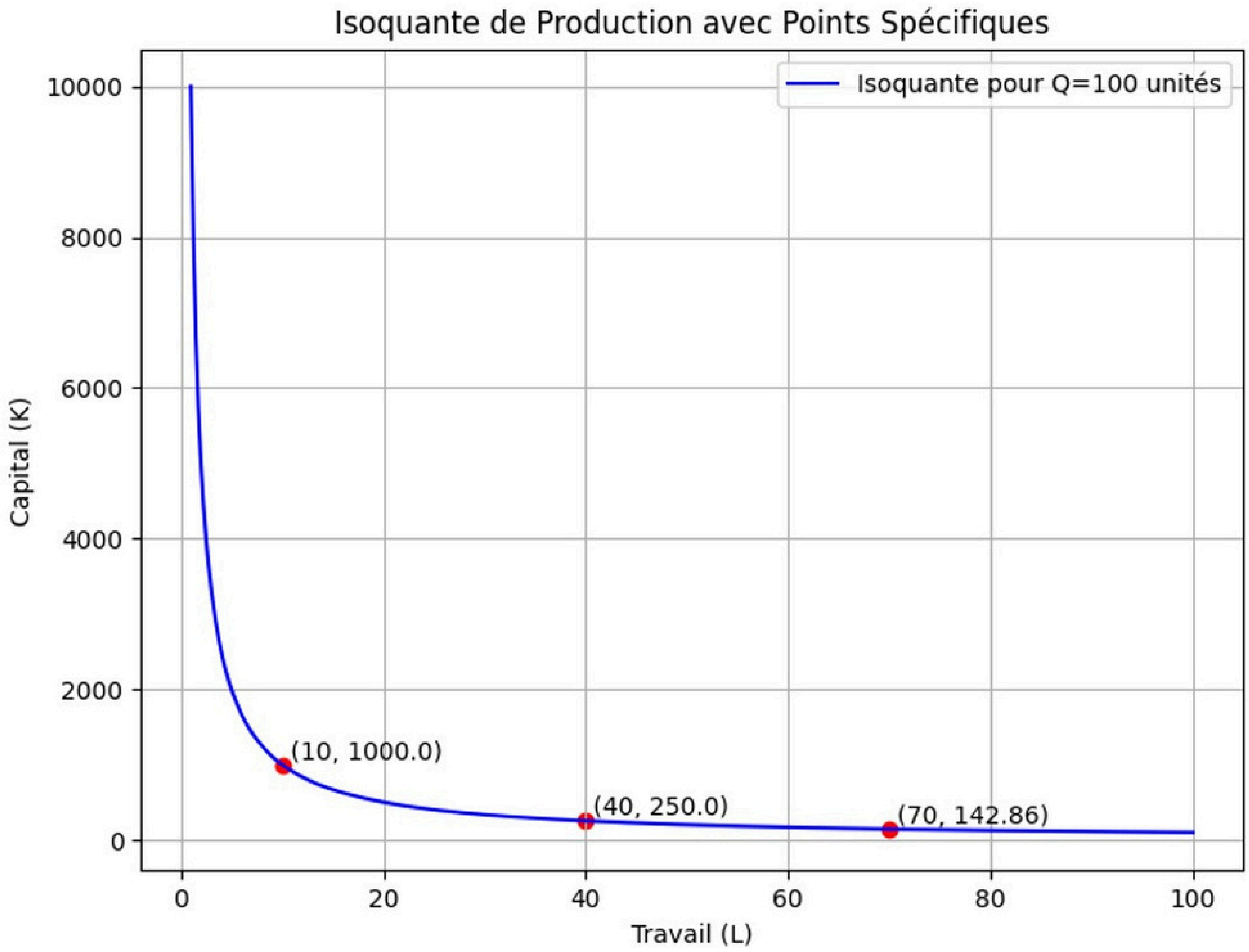


Figure: Isoquante de production pour Q=100 unités avec 3 points spécifiques

Calcul du TMST : Le taux marginal de substitution technique

Calcul du TMST

Étape 1 : Écriture de la différentielle totale de la fonction de production

On commence par exprimer la variation de la production (dQ) en fonction des variations du capital (dK) et du travail (dL) :

$$dQ = PmK \times dK + PmL \times dL$$

où :

- **PmK est la productivité marginale du capital : c'est la variation de la production quand on augmente le capital d'une unité.**
- **PmL est la productivité marginale du travail : c'est la variation de la production quand on augmente le travail d'une unité.**

Calcul du TMST

Étape 2 : Supposition que la production est constante

Si on veut garder le même niveau de production, cela signifie que :

$$dQ=0$$

Ainsi, l'équation devient :

$$PmK \times dK + PmL \times dL = 0$$

Cela signifie que toute augmentation du capital (K) doit être compensée par une diminution correspondante du travail (L) pour que la production reste constante.

Calcul du TMST

Étape 3 : Isolement des termes

On réarrange les termes pour exprimer la relation entre dK et dL :

Ainsi, l'équation devient :

$$PmL \times dL = - PmK \times dK$$

Puis, en divisant par PmK et dL :

$$PmL / PmK = -dK / dL$$

Calcul du TMST

Étape 4 : Interprétation du TMST

On obtient donc la relation clé :

$$TMST = PmL / PmK = -dK / dL$$

- **Le Taux Marginal de Substitution Technique (TMST) représente la quantité de capital que l'on peut retirer si l'on ajoute une unité de travail, tout en gardant la production inchangée.**

- **Mathématiquement, il est donné par le rapport des productivités marginales : Si PmL est élevé, cela signifie que le travail est très productif et peut remplacer plus facilement le capital. Si PmK est élevé, alors le capital est plus efficace et il faut beaucoup de travail pour le compenser.**

Exercice Corrigé : Calcul du TMST

Considérons une fonction de production $Q = L^{0.5}K^{0.5}$.
Objectif: Calculer le TMST pour des points spécifiques sur l'isoquante où $Q = 10$.
Démarche:

- 1. Calculer Pm**L** et Pm**K** à partir de la fonction de production.
- 2. Utiliser ces valeurs pour calculer le TMST pour différentes combinaisons de L et K.
- 3. Illustrer ces points sur un graphique d'isoquante.

Résultats et Graphique

$$K = ?$$

Table: Valeurs du TMST pour différents niveaux de K et L

Travail (L)	Capital (K)
10	
20	
30	
40	

Résultats et Graphique

Cas 1 : L = 10, K = 10

$$Q = L^{0.5}K^{0.5}$$

Calcul PmL : le travail est variable

$$PmL = 0.5 \times (10^{-0.5}) \times (10^{0.5})$$

Réécrivons les racines :

$$PmL = 0.5 \times \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \times (\sqrt{10})$$

$$PmL = 0.5 \times 1 = 0.5$$

Résultats et Graphique

Cas 1 : L = 10, K = 10

$$Q = L^{0.5}K^{0.5}$$

Calcul Pmk : le capital est variable

$$PmK = 0.5 \times (10^{-0.5}) \times (10^{0.5})$$

Réécrivons les racines :

$$PmK = 0.5 \times \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \times (\sqrt{10})$$

$$PmK = 0.5 \times 1 = 0.5$$

Donc : $$TMST = \frac{PmL}{PmK} = \frac{0.5}{0.5} = 1$$

Résultats et Graphique

Cas 1 : L = 10, K = 10

L	K	PmL	PmK	TMST
10	10	0.5	0.5	**1**
20	5	0.25	1	0.25
30	3.33	0.166	1.500	0.11
40	2.5	0.125	2	0.06

Résultats et Graphique

L	K	PmL	PmK	TMST
10	10	0.5	0.5	1

Interprétation du TMST :

Le Taux Marginal de Substitution Technique (TMST) mesure combien d'unités de capital (K) doivent être réduites pour ajouter une unité de travail (L), tout en gardant la production constante.

Formellement :

$$TMST = \left| \frac{dK}{dL} \right|$$

Ici, nous avons trouvé TMST=1, donc si l'entreprise augmente L de 1, elle peut réduire K de 1 unités sans affecter la production.

Résultats et Graphique

📌 Interprétation économique :

- Lorsque L=10 et K=10, le capital et le travail sont utilisés dans des proportions équilibrées.
- Cela signifie que le capital n'est ni plus abondant ni plus rare par rapport au travail.
- Dans cette situation, une unité supplémentaire de travail remplace exactement une unité de capital, ce qui reflète une substitution équilibrée.

Attention !

Dire que le capital est dominant signifie juste qu’il est largement utilisé .

Cela ne signifie pas qu’il est "**inutile**", mais plutôt qu'il y en a beaucoup, et qu'on peut en réduire une grande quantité si on ajoute un peu plus de travail.

📌 4. Conclusion :

- Dans certains cas, le travail peut remplacer le capital, mais seulement jusqu'à une certaine limite.
- Le TMST nous dit à quel taux cela est possible, mais il n'implique pas une substitution illimitée.
- Plus TMST est grand, plus le capital domine la production.
- Plus TMST est petit, plus le travail et le capital sont équilibrés en termes de contribution à la production.

Cela signifie qu'on ne peut pas remplacer K par L à l'infini sans réduire la **productivité globale !**

Exemple concret :

Si une usine est très automatisée (beaucoup de machines, peu de travailleurs), ajouter un peu plus de main-d'œuvre peut compenser la réduction des machines.
Mais si on continue à réduire le capital et à ajouter des travailleurs, à un certain moment, ils ne pourront plus compenser l'absence totale de machines.

Il y a donc une limite à la substitution !

Explication Économique (Suite)

Efficacité de la Substitution :

- À mesure que le travail augmente et le capital diminue, il devient relativement plus facile de substituer le travail au capital. Cela peut refléter un changement dans l'efficacité de la combinaison des deux facteurs.

Logique Économique :

- D'un point de vue économique, ce phénomène reflète l'adaptation des entreprises aux conditions de production. Le TMST aide à identifier le "coût" de substitution d'un facteur par un autre à différents points le long de l'isocuante, permettant aux entreprises d'ajuster leur mix de production de facteurs pour maximiser l'efficacité.